THE WEST BENGAL COUNCIL OF RABINDRA OPEN SCHOOLING

UCHCHA MADHYAMIK PARIKSHA, 2023

পশ্চিমবঙ্গ রবীন্দ্র মুক্ত বিদ্যালয় সংসদ

উচ্চমাধ্যমিক পরীক্ষা, ২০২৩

গণিত

(পূরাতন পাঠক্রম)

Mathematics

(Old Syllabus)

সময় ঃ ৩ ঘণ্টা ১৫ মিনিট — পূর্ণমান ঃ ১০০

Time : 3 Hours 15 Minutes — **Full Marks : 100**

পরীক্ষার্থীদের প্রতি সাধারণ নির্দেশ
(General Instructions for the Examinees)

সকল পরীক্ষার্থীকে প্রথম পত্র এবং দ্বিতীয় পত্রের উত্তর একটি উত্তর পত্রে লিখতে হবে।
All Candidates should answer First Paper and Second Paper in one Answer Booklet.

সকল পরীক্ষার্থীকে নিজের নাম ও নিবন্ধন নম্বর উত্তরপত্রে লিখতে হবে।

Candidates should write their Name and Registration No. in their respective answer scripts.

পরীক্ষার সময়ের প্রথম ১৫ মিনিট প্রশ্ন পড়ার জন্য।
প্রশ্নের উত্তর যথাযথ হওয়া দরকার।

First 15 Minutes are allotted for reading the question paper.
Answers should be in brief and to the point.

প্রতিটি উত্তরের প্রশ্নসংখ্যা খাতায় সঠিকভাবে লিখতে হবে।

Write correct question no. against each answer.

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে।
বানান ভুল, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কাটা যাবে।
প্রান্তিক সংখ্যাগুলি প্রতিটি প্রশ্নের পূর্ণমান নির্দেশ করছে।

Special credit will be given for answers which are brief and to the point.
Marks will be deducted for spelling mistakes, untidiness and bad handwriting.
In the right side the marks of questions are given.

প্রথম পত্র **পূর্ণমান: 50**

1. *যেকোনো ছয়টি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 1×6=6

(i) $\frac{10!}{7!}$-এর মান কত?

(ii) 2, 6, 18, 54, ... এই গুণোত্তর প্রগতির 10-তম পদ নির্ণয় করো।

(iii) $\cot(1050^\circ)$-এর মান কত?

(iv) $\cos\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$-এর মান নির্ণয় করো।

(v) মূলবিন্দুগামী ও x অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

(vi) $y^2 + 12 = 4\ (x+y)$ অধিবৃত্তের নাভি ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় করো।

(vii) $(\alpha-\beta,\ \alpha+\beta)$, $(\alpha+\beta,\ \alpha-\beta)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

2. *যেকোনো ছয়টি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 2×6=12

(i) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান নির্ণয় করো।

(ii) $\frac{1}{e^3}$-কে অসীম শ্রেণীর আকারে প্রকাশ করো।

(iii) $4\theta = 11\pi$ হলে $\frac{\sin(-\theta)+\cos\theta}{\sec(-\theta)+\tan(-\theta)}$-এর মান নির্ণয় করো।

(iv) সমাধান করো ঃ $\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}+\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}=2\tan^{-1}x$

(v) প্রমাণ করো ঃ $\sin A + \sin B > \sin C$

(vi) $(a^2,\ b^2)$, $(b^2,\ a^2)$, $(a,\ -b)$ বিন্দু তিনটির সমরেখ হবার শর্তটি নির্ণয় করো।

(vii) $(3, 2)$ ও $(-1, -2)$ বিন্দুগামী কোনো বৃত্তের কেন্দ্র $y = x + 3$ সরলরেখার উপর অবস্থিত হলে, বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

3. *যেকোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ $4 \times 3 = 12$

(i) ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সমীকরণগুলি সমাধান করো ঃ $x + y + z = 6;\ x + 2y + 3z = 14;\ -x + y - z = -2$

(ii) $\left(9x^2 - \frac{1}{3x}\right)^{12}$ বিস্তৃতির x বর্জিত পদটির মান নির্ণয় করো।

(iii) ${}^{n}p_{r} = 210$ এবং ${}^{n}c_{r} = 35$ হলে n এবং r-এর মান নির্ণয় করো।

(iv) $\frac{\sqrt{3} + i\sqrt{2}}{2\sqrt{3} + i\sqrt{2}} = x + iy$ (x ও y বাস্তব এবং $i = \sqrt{-1}$) হলে x ও y-এর মান নির্ণয় করো এবং দেখাও যে $x^2 + y^2 = \frac{5}{14}$।

4. *যেকোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ $4 \times 3 = 12$

(i) $x = \tan(\pi + \theta) + \sin(\pi - \theta);\ y = \tan(2\pi + \theta) + \sin(2\pi - \theta)$-এর থেকে θ অপনয়ন করো।

(ii) $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$ হলে দেখাও যে $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$।

(iii) a, b, c সমান্তর প্রগতিতে থাকলে দেখাও যে $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2} = 3$।

(iv) সমাধান করো ঃ $1 - 2\sin\theta - 2\cos\theta + \cot\theta = 0\ (0 \le \theta \le 2\pi)$

5. *যেকোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ $4 \times 2 = 8$

(i) একটি পরাবৃত্তের নাভি দুটির স্থানাঙ্ক $(\pm 6, 0)$ এবং এর নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 10 একক। পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো।

(ii) প্রমাণ করো যে $x^2 = 4ay$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুগামী জ্যা-সমূহের মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ হয় $x^2 = 2ay$ অধিবৃত্ত।

(iii) $(7, 9)$ বিন্দুগামী ও $x - \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}$ সরলরেখার সঙ্গে 60° কোণে নত সরলরেখা দুটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

দ্বিতীয় পত্র **পূর্ণমান:** 50

1. *যেকোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 1×4=4

(i) মান নির্ণয় করোঃ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin 5x}$

(ii) অবকলন নির্ণয় করোঃ $\sqrt{\log x}$

(iii) মান নির্ণয় করোঃ $\int e^{5\tan x}dx$

(iv) $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তের (3, –4) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করো।

(v) সমাকলনের মৌলিক উপপাদ্যটি বিবৃত করো।

2. *যেকোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 2×3=6

(i) মান নির্ণয় করো ঃ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+\alpha x)}{\log(1+\beta x)}$

(ii) $y = e^{\frac{y}{x}}$ হলে প্রমাণ করো $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x(x-y)}$ ।

(iii) মান নির্ণয় করো ঃ $\int_1^e \dfrac{(\log x)^2}{x}$

(iv) দুটি সংখ্যার সমষ্টি 12 হলে, তাদের গুণফলের বৃহত্তম মান নির্ণয় করো।

3. (i) $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ হলে প্রমাণ করো $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$। 4

অথবা,

(ii) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ হলে, প্রমাণ করো $\left[\dfrac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=a} = \dfrac{1}{2a}$ ।

4. *যেকোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ $4\times2=8$

(i) প্রথম নিয়ম থেকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় করো ঃ $\sqrt[3]{x}$

(ii) $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো ঃ $x^y.y^x = 1$

(iii) দেখাও যে x-এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ অপেক্ষকটি সন্তত।

5. *যেকোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ $4\times2=8$

(i) সমাকলন করো ঃ $\int\sqrt{\dfrac{x}{a-x}}$

(ii) সমাকলন করো ঃ $\int\dfrac{(3x+2)dx}{\sqrt{3x^2+4x+1}}$

(iii) সমাকলন করো ঃ $\int\dfrac{dx}{\sqrt{9x^2-49}}$

6. মান নির্ণয় করোঃ $4\times1=4$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^6+2^6+3^6+\ldots+n^6}{n^7}$$

অথবা,

প্রমাণ করো ঃ $\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\dfrac{\pi^2}{4}$

7. *যেকোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ $4\times2=8$

(i) r সেমি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলকের বৃহত্তম যে চোঙ অন্তর্লিখিত করা যায় তার আয়তন নির্ণয় করো।

(ii) $\dfrac{x}{h}+\dfrac{y}{k}=1$ সরলরেখা $\left(\dfrac{x}{a}\right)^n+\left(\dfrac{y}{b}\right)^n=1$ বক্রকে স্পর্শ করলে দেখাও যে $\left(\dfrac{a}{h}\right)^{\frac{n}{n-1}}+\left(\dfrac{b}{k}\right)^{\frac{n}{n-1}}=1$।

(iii) $y^2 = 9x$ অধিবৃত্ত এবং $y = x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

8. ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে ত্রিভুজের কোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক। 4

অথবা,

যেকোনো দুটি সেট A ও B-এর জন্য প্রমাণ করো $(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$ ।

9. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা t সময়ে S পথ অতিক্রম করে অর্থাৎ $S = t^5 - 40t^3 + 30t^2 + 80t - 250$। তার ত্বরণ নির্ণয় করো। 4

অথবা,

যদি $(1 + x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n$ হয়, তবে দেখাও যে $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_n^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ ।

First Paper **Full Marks: 50**

1. Answer *any six* questions: 1×6=6

(i) Find the value of $\frac{10!}{7!}$.

(ii) Find the value of 10th term of the G.P. series 2, 6, 18, 54, ...

(iii) Find the value of $\cot(1050^\circ)$.

(iv) Find the value of $\cos\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$.

(v) Find the equation of a straight line passing through the origin and parallel to x-axis.

(vi) $y^2+12=4(x+y)$, find the focus and the equation of directrix.

(vii) Find the co-ordinate of the mid point joining the two points $(\alpha-\beta, \alpha+\beta)$, $(\alpha+\beta, \alpha-\beta)$.

2. Answer *any six* questions: 2×6=12

(i) Find the value of the determinant $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$.

(ii) To convert $\frac{1}{e^3}$ as the form of infinite series.

(iii) Find the value of $\frac{\sin(-\theta)+\cos\theta}{\sec(-\theta)+\tan(-\theta)}$ if $4\theta = 11\pi$.

(iv) Solve: $\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}+\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}=2\tan^{-1}x$

(v) Prove that $\sin A + \sin B > \sin C$.

(vi) Find the condition that the three points (a^2, b^2), (b^2, a^2), $(a, -b)$ are collinear.

(vii) Find the equation of a circle which passes through the points (3, 2) and (–1, –2) and the centre of the circle lies on the straight line $y = x + 3$.

3. Answer *any three* questions: 4×3=12

(i) Solve the equation with the help of Matrix: $x + y + z = 6$; $x + 2y + 3z = 14$; $-x + y - z = -2$

(ii) Find the value of the term which is independent of x from $\left(9x^2 - \frac{1}{3x}\right)^{12}$.

(iii) Find the value of n and r if ${}^np_r = 210$ and ${}^nc_r = 35$.

(iv) If $\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+i\sqrt{2}} = x + iy$ (where x and y are real and $i = \sqrt{-1}$) find the values of x and y and also show that $x^2 + y^2 = \frac{5}{14}$.

4. Answer *any three* questions: 4×3=12

(i) Eleminate θ from $x = \tan(\pi + \theta) + \sin(\pi - \theta)$ and $y = \tan(2\pi + \theta) + \sin(2\pi - \theta)$.

(ii) If $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$, show that $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$.

(iii) Show that $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2} = 3$ if a, b, c are in A.P.

(iv) Solve: $1 - 2\sin\theta - 2\cos\theta + \cot\theta = 0$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$.

5. Answer *any two* questions: 4×2=8

(i) The co-ordinates of the foci of a hyperbola are $(\pm 6, 0)$ and its latus rectum is 10 unit. Find the equation of the hyperbola.

(ii) Show that the locus of the middle points of chords of the parabola $x^2 = 4ay$ passing through the vertex is the parabola $x^2 = 2ay$.

(iii) Find the equation of the lines passing through the point (7, 9), which are inclined at an angle 60° with the straight line $x - \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}$.

Second Paper **Full Marks: 50**

1. Answer *any four* questions: 1×4=4

(i) Find the value of $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 8x}{\sin 5x}$.

(ii) Find the derivative of $\sqrt{\log x}$.

(iii) Evaluate: $\int e^{5\tan x} dx$

(iv) Find the equation of tangent to the circle $x^2 + y^2 = 25$ at the point (3, −4).

(v) State the fundamental theorem of Integral Calculus.

2. Answer *any three* questions: 2×3=6

(i) Find the value of $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+\alpha x)}{\log(1+\beta x)}$.

(ii) If $y = e^{\frac{y}{x}}$, prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(x-y)}$.

(iii) Find the volume of $\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x}$.

(iv) The sum of two numbers is 12, find the maximum value of their product.

3. (i) $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$, prove that $x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$. 4

Or,

(ii) If $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, prove that $\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=a} = \frac{1}{2a}$.

4. Answer *any two* questions: 4×2=8

(i) Find $\frac{dy}{dx}$ of $\sqrt[3]{x}$ from first principle.

(ii) Find $\frac{dy}{dx}$: $x^y . y^x = 1$

(iii) Show that the function $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ is continuous for every real values of x.

5. Answer *any two* questions: 4×2=8

(i) Integrate: $\int\sqrt{\frac{x}{a-x}}$

(ii) Integrate: $\int\frac{(3x+2)dx}{\sqrt{3x^2+4x+1}}$

(iii) Integrate: $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-49}}$

6. Find the value of: 4×1=4

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^6+2^6+3^6+\ldots+n^6}{n^7}$$

Or,

Prove that: $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi^2}{4}$

7. Answer any *two* questions: 4×2=8

(i) Find the volume of the largest cylinder that can be inscribed in a sphere of radius r cm.

(ii) If the straight line $\frac{x}{h}+\frac{y}{k}=1$ touches the curve $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=1$, then show that

$$\left(\frac{a}{h}\right)^{\frac{n}{n-1}}+\left(\frac{b}{k}\right)^{\frac{n}{n-1}}=1.$$

(iii) Find the area included between $y^2 = 9x$ and $y = x$.

8. With the help of vector, prove that the line segment joining the mid points of any two sides of a triangle are parallel to and half of the third side. 4

Or,

For any two sets A and B, prove that $(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$.

9. The space S described in time t by a particle moving in a straight line is given by:

$S = t^5 - 40t^3 + 30t^2 + 80t - 250$

Find its acceleration. 4

Or,

If $(1 + x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n$, show that $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_n^2 = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.