THE WEST BENGAL COUNCIL OF RABINDRA OPEN SCHOOLING

UCHCHA MADHYAMIK PARIKSHA, 2023

পশ্চিমবঙ্গ রবীন্দ্র মুক্তবিদ্যালয় সংসদ

উচ্চমাধ্যমিক পরীক্ষা, ২০২৩

গণিত

(নূতন পাঠক্রম)

Mathematics

(New Syllabus)

সময় ঃ ৩ ঘণ্টা ১৫ মিনিট | **পূর্ণমান ঃ ৮০**

Time : 3 Hours 15 Minutes | **Full Marks : 80**

পরীক্ষার্থীদের প্রতি সাধারণ নির্দেশ
(General Instructions for the Examinees)

সকল পরীক্ষার্থীকে নিজের নাম, ক্রমিক নম্বর ও নিবন্ধন নম্বর উত্তরপত্রে লিখতে হবে।
Candidates should write their Name, Roll No. and Registration No. in their respective answer scripts.

পরীক্ষার সময়ের প্রথম ১৫ মিনিট প্রশ্ন পড়ার জন্য।
প্রশ্নের উত্তর যথাযথ হওয়া দরকার।
First 15 Minutes are allotted for reading the question paper.
Answers should be in brief and to the point.

প্রতিটি উত্তরের প্রশ্নসংখ্যা খাতায় সঠিকভাবে লিখতে হবে।
Write correct question no. against each answer.

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে।
বানান ভুল, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কাটা যাবে।
প্রান্তিক সংখ্যাগুলি প্রতিটি প্রশ্নের পূর্ণমান নির্দেশ করছে।
Special credit will be given for answers which are brief and to the point.
Marks will be deducted for spelling mistakes, untidiness and bad handwriting.
In the right side the marks of questions are given.

1. *যে কোনো দশটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 1×10=10

(a) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{20}$ -এর বিস্তৃতির দশম পদের সহগ কত?

(b) 5, x, 405 সংখ্যা তিনটি গুণোত্তর প্রগতিতে থাকলে, x-এর মান কত?

(c) $5x^2 - 7x - k = 0$ সমীকরণের বীজ দুটি পরস্পর অন্যোন্যক হলে, k-এর মান কত?

(d) $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$-এর মুখ্য মান কত?

(e) মান নির্ণয় করো ঃ $\sin\frac{5\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}$

(f) (2, –5) ও (–3, –2) বিন্দু দুটির সংযোজক রেখাংশ একটি বিন্দুতে 4 : 3 অনুপাতে বহির্বিভক্ত হলে, ওই বিন্দুর কোটি নির্ণয় করো।

(g) $4x^2 = 3y$ অধিবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় করো।

(h) $y^2 = 4ax$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2}$-এর মান নির্ণয় করো।

(i) মান নির্ণয় করো ঃ $\int 2^{3x}\,dx$

(j) P ও Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i}+\hat{k}$ এবং $-3\hat{i}-4\hat{j}-5\hat{k}$ হলে, $\overrightarrow{QP}$ ভেক্টরের মান কত?

(k) $0 \le x \le 2\pi$ বিস্তারে $f(x) = \sin x$ অপেক্ষকটি x-এর কোন মানের জন্য অবম হবে, তা নির্ণয় করো।

2. (a) *যে কোনো একটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 2×1=2

(i) মান নির্ণয় করো ঃ $\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)$

(ii) মান নির্ণয় করো ঃ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{8^x-1}{x}$

(b) *যে কোনো একটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 2×1=2

(i) ${}^9p_5 + {}^5p_4 = {}^{10}p_r$ হলে, r-এর মান কত?

(ii) $(1+i)\left(\sqrt{3}+i\right)$-এই জটিল রাশির আরগুমেন্ট নির্ণয় করো।

(c) *যে কোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 2×3=6

(i) সমাকলন করো ঃ $\int\frac{e^x dx}{e^{2x}-9}$

(ii) $y=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sqrt{1+2\sin\theta}}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$-এর মান নির্ণয় করো।

(iii) মান নির্ণয় করোঃ $\int_0^1\frac{x+1}{x^2+1}\,dx$

(iv) $y=f(x)=\frac{1+x}{1-x}$ হলে, প্রমাণ করো যে $f(y)=-\frac{1}{x}$।

(d) *যে কোনো একটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 2×1=2

(i) $y = x^5$ হলে, দেখাও যে $x\frac{dy}{dx} - 5y = 0$ ।

(ii) $x^2 + y^2 = 25$-এর $x = 0$ বিন্দুতে $\frac{d^2y}{dx^2}$-এর মান নির্ণয় করো।

(e) *যে কোনো একটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 2×1=2

(i) দেখাও যে $x + \frac{1}{x}$ অপেক্ষকের চরম মান তার অবম মান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

(ii) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ বৃত্তের উপর $(2, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করো।

3. (a) *যে কোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 4×2=8

(i) Cramer-এর নিয়মে সমীকরণগুলি সমাধান করো ঃ
$3x + y + z = 10;\ x + y - z = 0;\ 5x - 9y = 1$

(ii) গাণিতিক আরোহন পদ্ধতিতে প্রমাণ করো, $4 + 44 + 444 + \cdots$ n সংখ্যক পদ পর্যন্ত $= \frac{4}{81}(10^{n+1} - 9n - 10)$ ।

(iii) বর্গমূল নির্ণয় করো ঃ $\frac{7 - 24i}{3 + 4i}$

(b) *যে কোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 4×2=8

(i) সমাধান করো ঃ $(\sec\theta - 1) = (\sqrt{2} - 1)\tan\theta$

(ii) দেখাও যে $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{5}{16}$ ।

(iii) $5\cos\theta + 12\sin\theta + 1$-এর বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় করো।

(c) *যে কোনো একটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 4×1=4

(i) একটি অধিবৃত্তের শীর্ষ ও নাভির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-1, 3)$ ও $(3, -1)$ হলে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

(ii) $x + y + 9 = 0$ এবং $3x - 2y + 2 = 0$ সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দুগামী যে সরলরেখাটি $4x + 5y + 1 = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

(d) *যে কোনো একটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 4×1=4

(i) মান নির্ণয় করো ঃ $\underset{x\to\infty}{Lt}\frac{4x^3 - 3x^2 + 6x - 2}{3 + 5x^2 - 5x^3}$

(ii) সেট প্রক্রিয়ার সাহায্যে 12, 15 এবং 20 সংখ্যা তিনটির ল.সা.গু. নির্ণয় করো।

(e) *যে কোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 4×2=8

(i) $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$-এর $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

(ii) $y=\sin^{-1}\dfrac{a+b\cos x}{b+a\cos x}$ হলে, $\dfrac{dy}{dx}$-এর সরলতম মান নির্ণয় করো।

(iii) $f(x)=\left(\dfrac{a+x}{b+x}\right)^x+\cos x$ হলে, প্রমাণ করো যে $f'(0)=\log\dfrac{a}{b}$।

4. (a) যদি $y=f(x)$ এবং $x=\dfrac{1}{z}$ হয়, তবে প্রমাণ করো, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=2z^3\dfrac{dy}{dx}+z^4\dfrac{d^2y}{dx^2}$। 4

অথবা,

(b) $x=Ae^{\frac{kt}{2}}\cos(pt+\varepsilon)$ এবং A,k,p,ε ধ্রুবক হলে, দেখাও যে $\dfrac{d^2x}{dt^2}+k\dfrac{dx}{dt}+n^2x=0$, যেখানে $n^2=p^2+\dfrac{1}{4}k^2$। 4

5. সমাকলন করো (*যে কোনো দুটি*) ঃ 4×2=8

(a) $\int\dfrac{x^2dx}{x^6-6x^3+5}$ (b) $\int\dfrac{\log x}{(1+\log x)^2}dx$ (c) $\int(\cos^{-1}x)^3\,dx$

6. মান নির্ণয় করো ঃ 4

(a) $\int_0^{\pi}\dfrac{dx}{5+4\cos x}$

অথবা,

(b) $\int_{\alpha}^{\beta}\dfrac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}$ 4

7. *যে কোনো একটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 4×1=4

(a) $\dfrac{x}{h}+\dfrac{y}{k}=1$ সরলরেখা $\left(\dfrac{x}{a}\right)^n+\left(\dfrac{y}{b}\right)^n=1$ বক্রকে স্পর্শ করলে, দেখাও যে $\left(\dfrac{a}{h}\right)^{\frac{n}{n-1}}+\left(\dfrac{b}{k}\right)^{\frac{n}{n-1}}=1$।

(b) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্ত এবং $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

8. *যে কোনো একটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 4×1=4

(a) ভেক্টর পদ্ধতি প্রয়োগ করে দেখাও যে কোনো ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক।

(b) প্রমাণ করো ঃ $\underset{n\to\infty}{Lt}\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}=\dfrac{1}{4}$

1. Answer *any ten* questions: 1×10=10

(a) Find the co-efficient of 10th term of the expression $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{20}$.

(b) Find the value of x, if 5, x, 405 are in G.P.

(c) If one root of $5x^2 - 7x - k = 0$ be reciprocal the other, find the value of k.

(d) Find the principal value of $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$.

(e) Find the value of $\sin\frac{5\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}$.

(f) Find the ordinate of the point which divides the line segment joining the points (2, –5) and (–3, –2) in the ratio 4 : 3 externally.

(g) Find the equation of the directrix of the parabola $4x^2 = 3y$.

(h) Find the value of $\frac{d^2y}{dx^2}$, if $y^2 = 4ax$.

(i) Find the value of $\int 2^{3x}\,dx$.

(j) The position vectors of the points P and Q are $2\hat{i}+\hat{k}$ and $-3\hat{i}-4\hat{j}-5\hat{k}$ respectively, find the value of $\overrightarrow{QP}$ vector.

(k) In which value of x, the function $f(x) = \sin x$ $(0 \le x \le 2\pi)$ is minimum?

2. (a) Answer *any one* question: 2×1=2

(i) Find the value of $\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)$.

(ii) Find the value of $\underset{x\to 0}{Lt}\frac{8^x-1}{x}$.

(b) Answer *any one* question: 2×1=2

(i) Find the value of r if ${}^9p_5 + {}^5p_4 = {}^{10}p_r$.

(ii) Find the argument of the complex number $(1+i)\left(\sqrt{3}+i\right)$.

(c) Answer *any three* questions: 2×3=6

(i) Integrate: $\int\frac{e^x dx}{e^{2x}-9}$

(ii) If $y=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sqrt{1+2\sin\theta}}$, find $\frac{dy}{dx}$.

(iii) Find the value of $\int_0^1\frac{x+1}{x^2+1}dx$.

(iv) If $y=f(x)=\frac{1+x}{1-x}$, prove that $f(y)=-\frac{1}{x}$.

(d) Answer *any one* question: 2×1=2

(i) If $y = x^5$, show that $x\frac{dy}{dx} - 5y = 0$.

(ii) If $x^2 + y^2 = 25$, find $\frac{d^2y}{dx^2}$ at $x = 0$.

(e) Answer *any one* question: 2×1=2

(i) Show that the maximum value of the function $x + \frac{1}{x}$ is less than its minimum value.

(ii) Find the equation of the tangent to the circle $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ at the point $(2, -1)$.

3. (a) Answer *any two* questions: 4×2=8

(i) Solve by Cramer's rule: $3x + y + z = 10$; $x + y - z = 0$; $5x - 9y = 1$

(ii) Using the principle of mathematical induction, prove that

$4 + 44 + 444 + \cdots$ to n terms $= \frac{4}{81}(10^{n+1} - 9n - 10)$.

(iii) Find the square root of $\frac{7 - 24i}{3 + 4i}$.

(b) Answer *any two* questions: 4×2=8

(i) Solve: $(\sec\theta - 1) = (\sqrt{2} - 1)\tan\theta$.

(ii) Show that $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{5}{16}$.

(iii) Find the maximum and minimum values of $5\cos\theta + 12\sin\theta + 1$.

(c) Answer *any one* question: 4×1=4

(i) Find the equation of a parabola whose vertex is at $(-1, 3)$ and focus is at $(3, -1)$.

(ii) Find the equation of the line which passes through the point of intersection of the lines $x + y + 9 = 0$ and $3x - 2y + 2 = 0$ and is perpendicular to the line $4x + 5y + 1 = 0$.

(d) Answer *any one* question: 4×1=4

(i) Find the value of $\underset{x\to\infty}{Lt} \frac{4x^3 - 3x^2 + 6x - 2}{3 + 5x^2 - 5x^3}$.

(ii) Using set operation find the L.C.M. of the three numbers 12, 15 and 20.

(e) Answer *any two* questions: 4×2=8

(i) Find the derivative of $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ with respect to $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$.

(ii) If $y=\sin^{-1}\dfrac{a+b\cos x}{b+a\cos x}$, find the simple value of $\dfrac{dy}{dx}$.

(iii) If $f(x)=\left(\dfrac{a+x}{b+x}\right)^x+\cos x$, prove that $f'(0)=\log\dfrac{a}{b}$.

4. (a) If $y=f(x)$ and $x=\dfrac{1}{z}$, prove that $\dfrac{d^2y}{dx^2}=2z^3\dfrac{dy}{dx}+z^4\dfrac{d^2y}{dx^2}$. 4

Or,

(b) If $x=Ae^{\frac{kt}{2}}\cos(pt+\varepsilon)$ and A,k,p,ε are constants, show that $\dfrac{d^2x}{dt^2}+k\dfrac{dx}{dt}+n^2x=0$, where $n^2=p^2+\dfrac{1}{4}k^2$. 4

5. Integrate (*any two*): 4×2=8

(a) $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{x^6-6x^3+5}$ (b) $\displaystyle\int\frac{\log x}{(1+\log x)^2}dx$ (c) $\displaystyle\int(\cos^{-1}x)^3\,dx$

6. Find the value of 4

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{5+4\cos x}$

Or,

(b) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}$ 4

7. Answer *any one* question: 4×1=4

(a) If the straight line $\dfrac{x}{h}+\dfrac{y}{k}=1$ touches the curve $\left(\dfrac{x}{a}\right)^n+\left(\dfrac{y}{b}\right)^n=1$, show that $\left(\dfrac{a}{h}\right)^{\frac{n}{n-1}}+\left(\dfrac{b}{k}\right)^{\frac{n}{n-1}}=1$.

(b) Find the area of the smaller region bounded by the ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ and the straight line $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

8. Answer *any one* question: 4×1=4

(a) By using vector method prove that the line segment joining the mid points of the two sides of a triangle are parallel and half of the third side.

(b) Prove that $\underset{n\to\infty}{Lt}\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}=\dfrac{1}{4}$

———